

Calcul de la butée en présence de séisme par une approche variationnelle

A. H. Soubra & P. Regenass
ENSAI, Strasbourg, France

R. Kastner
INSA, Lyon, France

RESUME: On présente une méthode de calcul de la butée dynamique des terres par une approche pseudo-statique. Fondée sur le calcul variationnel, cette méthode mécaniquement rigoureuse dans le cadre de la méthode du prisme de rupture, permet de s'affranchir des hypothèses a priori concernant la forme de la surface de rupture et la distribution des contraintes normales le long de cette surface. Après une approche théorique, quelques résultats numériques illustrent l'influence de l'action du séisme sur la distribution des contraintes normales et la surface de rupture correspondante.

1 INTRODUCTION

L'étude de la stabilité des ouvrages de soutènement nécessite la détermination des pressions actives et passives des terres. Dans les situations non sismiques, les coefficients de poussée et de butée classiques tels qu'ils sont donnés par Caquot et Kérisel (1956) et Sokolovski (1960), sont généralement les plus utilisés. Ces méthodes sont du type équilibre limite. Il existe évidemment d'autres méthodes: Certaines basées sur la méthode du prisme de rupture: Coulomb(1776); Terzaghi(1943), d'autres basées sur la théorie de l'analyse limite: Méthodes de la borne supérieure et de la borne inférieure.

Dans les zones sismiques, il est nécessaire de prendre en compte les effets dynamiques dans le dimensionnement des ouvrages de soutènement. La méthode classique de Monobe et Okabe (1929) prend en compte l'action du séisme par une force volumique KW appliquée au centre de gravité du prisme de Coulomb. La butée dynamique ainsi déterminée est la somme d'une composante statique, correspondant à la butée des terres, et d'un incrément dynamique. La valeur de la composante horizontale du coefficient sismique K_h varie généralement de 0.1 à 0.3 selon les pays et la zone sismique. La valeur de la composante verticale K_v est généralement prise égale à zéro.

On présente dans cet article une méthode de prisme de rupture fondée sur le calcul variationnel. Cette méthode consiste à déterminer de façon non arbitraire la surface de rupture (fonction cinématique) et la distribution des contraintes normales (fonction statique) le long de cette surface. Après une approche théorique succincte du calcul variationnel, quelques exemples numériques illustrent l'influence de la prise en compte de l'action sismique sur les valeurs du coefficient de butée, la forme de la surface de rupture et la distribution des contraintes normales le long de cette surface.

2 APPROCHE VARIATIONNELLE DE LA METHODE DU PRISME DE RUPTURE

L'étude du problème de butée par la méthode du prisme de rupture fait appel à deux hypothèses a priori: l'une concerne la forme de la surface de rupture, l'autre la distribution des contraintes normales le long de cette surface. D'autre part, par mesure de simplicité, cette famille de méthodes ne vérifient que partiellement les trois équations de la statique. Dans le sens d'une analyse mécanique plus rigoureuse on propose une approche variationnelle appliquée à la méthode du prisme de rupture. Cette approche permet d'établir

analytiquement les fonctions cinématique et statique extrémales aboutissant à la charge de rupture minimale, de telle sorte que l'équilibre statique global soit complètement vérifié pour la masse en glissement. Pour la simplicité de l'analyse nous adopterons les hypothèses suivantes:

1. Le point d'application de la butée dynamique est pris au tiers inférieur de la fiche. L'expérience montre qu'il dépend en fait de la cinématique du problème.
2. L'inertie de l'ouvrage de soutènement est supposée négligeable.
3. Le problème est traité en déformation plane.
4. Avant la rupture le changement de géométrie est insignifiant.
5. Le sol est sans cohésion et la présence éventuelle de l'eau n'est pas prise en compte.

2.1 Equations de base

Comme cité précédemment, on suppose le sol en état d'équilibre limite le long de la surface de rupture et les trois équations de l'équilibre statique vérifiées pour la masse en glissement. En combinant le critère de Mohr-Coulomb avec les trois équations de l'équilibre, on obtient:

$$P_p \cdot \cos \delta = \int_{x_0}^{x_1} [\sigma(\operatorname{tg} \phi + y') - K_h \gamma(f-y)] dx \quad (1a)$$

$$P_p \cdot \sin \delta = \int_{x_0}^{x_1} [\sigma(1 - \operatorname{tg} \phi \cdot y') + \gamma(f-y)(K_v - 1)] dx \quad (1b)$$

$$P_p \cdot \cos \delta \cdot f/3 = \int_{x_0}^{x_1} [\sigma(1 - \operatorname{tg} \phi \cdot y')x + \gamma \cdot x(f-y)(K_v - 1) - K_h \gamma(f-y)y + \sigma(\operatorname{tg} \phi + y')y] dx \quad (1c)$$

Les paramètres de ces équations sont donnés sur la figure(1).

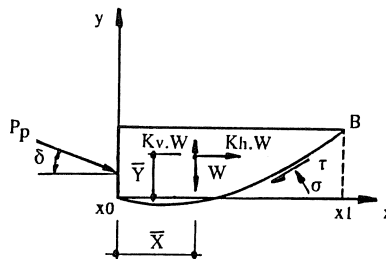


Fig.1: Principe du prisme de rupture

On constate que la force de butée est une fonctionnelle des fonctions $y(x)$ et $\sigma(x)$. La résolution rigoureuse du problème de butée consiste à minimiser la fonctionnelle de butée P_p soumise aux trois équations contraintes de l'équilibre statique. Ainsi le problème de butée se ramène à un problème variationnel de type isopérimétrique (Soubra 1989).

La fonctionnelle à minimiser dans ce cas est définie comme suit:

$$H = F + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$$

$$\text{où: } F = \sigma(\operatorname{tg} \phi + y') - K_h \gamma(f-y)$$

$$G_1 = \sigma(1 - \operatorname{tg} \phi \cdot y') + \gamma(f-y)(K_v - 1)$$

$$G_2 = \sigma(1 - \operatorname{tg} \phi \cdot y')x + \gamma \cdot x(f-y)(K_v - 1) - K_h \gamma(f-y)y + \sigma(\operatorname{tg} \phi + y')y$$

λ_1, λ_2 multiplicateurs de Lagrange

Enfin les deux fonctions extrémales $y(x)$ et $\sigma(x)$ solution du problème doivent vérifier:

1. Le système des deux équations différentielles d'Euler pour la fonctionnelle H:

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma} = \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \sigma'} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'} \quad (2b)$$

2. Les équations exprimant les contraintes (équations de l'équilibre statique 1a, 1b, 1c).
3. Les conditions aux limites aux extrémités x_0 et x_1 .
 - Le point O correspond à l'extrémité fixe ($x_0=0, y_0=0$).
 - Le point B est libre de se déplacer le long de la surface de terrain. Pour cette extrémité la condition de transversalité suivante doit être vérifiée:

$$(H - y' \frac{\partial H}{\partial y'} - \sigma' \frac{\partial H}{\partial \sigma'})_{x=x_1} \delta x_1 + (\frac{\partial H}{\partial \sigma'})_{x=x_1} \delta \sigma_1 + (\frac{\partial H}{\partial y'})_{x=x_1} \delta y_1 = 0$$

Cette condition coïncide avec la condition aux limites de la contrainte au point B.

2.2 Détermination des fonctions statique et cinématique "potentielles"

1. Première équation d'Euler

Elle est donnée par l'équation (2a). En substituant l'expression de H dans cette équation, on aboutit à l'équation différentielle qui régit la surface de rupture. La résolution de cette équation différentielle nous donne l'équation suivante:

$$r = r_0 \cdot e^{(\theta - \theta_0) \tan \phi}$$

C'est l'équation d'une spirale logarithmique d'angle ϕ . L'introduction d'un effort sismique au centre de gravité de la masse en glissement ne modifie pas la surface de rupture obtenue par Soubra (1989) dans le cas du calcul de la butée des terres hors séisme.

2. Deuxième équation d'Euler

De même en remplaçant H dans l'équation (2b) on aboutit à l'équation différentielle qui régit la distribution des contraintes normales le long de la surface de rupture. La résolution de cette équation différentielle nous donne la distribution suivante:

$$\sigma(\theta) = \gamma \cdot r_0 \cdot (k_v - 1) \left\{ C_1 \left[A(\theta) \cdot C(\theta) - A(\theta_1) \cdot \frac{C^3(\theta_1)}{C^2(\theta)} \right] \right. \\ \left. + \gamma \cdot r_0 \cdot K_h \left\{ 2C_1 \left[B(\theta) \cdot C(\theta) - B(\theta_1) \cdot \frac{C^3(\theta_1)}{C^2(\theta)} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 \left[1 - \frac{C^2(\theta_1)}{C^2(\theta)} \right] \right\} \right\}$$

Avec les notations:

$$A(\theta) = (\sin \theta + 3 \tan \phi \cdot \cos \theta)$$

$$B(\theta) = (\cos \theta - 3 \tan \phi \cdot \sin \theta)$$

$$C(\theta) = e^{\theta \tan \phi}$$

$$C_1 = \frac{e^{-\theta_0 \tan \phi}}{1 + 9 \tan^2 \phi}$$

$$C_2 = \frac{\sin \theta_0}{2 \tan \phi}$$

2.3 Equations de l'équilibre statique

En remplaçant dans les trois équations de la statique les fonctions statique et cinématique extrémales, on obtient le système non linéaire

de trois équations à trois inconnues (P_p , θ_0 , θ_1) comme suit:

2.3.1 Equation de l'équilibre horizontal

$$P_p \cdot \cos \delta = \gamma \cdot r_0^2 \cdot (K_v - 1) \cdot C_1 \cdot C_3 \left\{ \left[\frac{1}{2} I_1 + 3 \tan \phi \cdot I_2 \right] \right. \\ \left. - A(\theta_1) \cdot C^3(\theta_1) [I_3] \right\} \\ + \gamma \cdot r_0^2 \cdot K_h \cdot C_3 \left\{ 2C_1 \left(\left[I_2 - \frac{3}{2} \tan \phi \cdot I_1 \right] \right. \right. \\ \left. \left. - B(\theta_1) \cdot C^3(\theta_1) [I_3] \right) \right. \\ \left. + C_2 [I_5 - C^2(\theta_1) \cdot I_3] \right\} \\ - \gamma \cdot r_0 \cdot K_h \cdot C^{-1}(\theta_0) \left\{ (f + r_0 \cdot \sin \theta_0) [\tan \phi \cdot I_5 - I_6] \right. \\ \left. - r_0 \cdot C^{-1}(\theta_0) \left[\frac{1}{2} \tan \phi \cdot I_1 - I_4 \right] \right\}$$

$$\text{où : } C_3 = (1 + \tan^2 \phi) e^{-\theta_0 \tan \phi}$$

$$I_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin 2\theta \cdot e^{2\theta \tan \phi} d\theta; \quad I_2 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos^2 \theta \cdot e^{2\theta \tan \phi} d\theta$$

$$I_3 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos \theta \cdot e^{-\theta \tan \phi} d\theta; \quad I_4 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin^2 \theta \cdot e^{2\theta \tan \phi} d\theta$$

$$I_5 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos \theta \cdot e^{\theta \tan \phi} d\theta; \quad I_6 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin \theta \cdot e^{\theta \tan \phi} d\theta$$

2.3.2 Equation de l'équilibre vertical

$$P_p \cdot \sin \delta = \gamma \cdot r_0^2 \cdot (K_v - 1) \cdot C_1 \cdot C_3 \left\{ A(\theta_1) \cdot C^3(\theta_1) [I_7] \right. \\ \left. - \left[I_4 + \frac{3}{2} \tan \phi \cdot I_1 \right] \right\} \\ + \gamma \cdot r_0 \cdot (K_v - 1) \cdot C^{-1}(\theta_0) \left\{ (f + r_0 \sin \theta_0) [\tan \phi \cdot I_5 - I_6] \right. \\ \left. - r_0 \cdot C^{-1}(\theta_0) \left[\frac{1}{2} \tan \phi \cdot I_1 - I_4 \right] \right\} \\ + \gamma \cdot r_0^2 \cdot K_h \cdot C_3 \left\{ 2C_1 \cdot \left(B(\theta_1) \cdot C^3(\theta_1) [I_7] \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\frac{1}{2} I_1 - 3 \tan \phi \cdot I_4 \right] \right) \right. \\ \left. + C_2 [C^2(\theta_1) I_7 - I_6] \right\}$$

$$\text{où: } I_7 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta \cdot e^{-\theta \tan\phi} d\theta$$

$$I_{10} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin^3\theta \cdot e^{3\theta \tan\phi} d\theta$$

2.3.3 Equation de l'équilibre des moments

$$P_p \cdot \cos\delta \cdot f/3 =$$

$$\begin{aligned} & + \gamma \cdot r_0^3 \cdot (K_v - 1) \cdot C_1 \cdot C_3 \left\{ \cos\theta_0 \left[I_4 + \frac{3}{2} \tan\phi \cdot I_1 \right] \right. \\ & \quad \left. - \sin\theta_0 \left[\frac{1}{2} I_1 + 3 \tan\phi \cdot I_2 \right] \right\} \\ & + A(\theta_1) \cdot C^3(\theta_1) \left[\sin\theta_0 \cdot I_3 - \cos\theta_0 \cdot I_7 \right] \Big\} \\ & + 2 \gamma \cdot r_0^3 \cdot K_h \cdot C_1 \cdot C_3 \left\{ \cos\theta_0 \left[\frac{1}{2} I_1 - 3 \tan\phi \cdot I_4 \right] \right. \\ & \quad \left. - \sin\theta_0 \left[I_2 - \frac{3}{2} \tan\phi \cdot I_1 \right] \right\} \\ & + B(\theta_1) \cdot C^3(\theta_1) \left[\sin\theta_0 \cdot I_3 - \cos\theta_0 \cdot I_7 \right] \Big\} \\ & + \gamma \cdot r_0^3 \cdot K_h \cdot C_2 \cdot C_3 \left\{ \left[\cos\theta_0 \cdot I_6 - \sin\theta_0 \cdot I_5 \right] \right. \\ & \quad \left. + C^2(\theta_1) \left[+ \sin\theta_0 \cdot I_3 - \cos\theta_0 \cdot I_7 \right] \right\} \\ & - \gamma \cdot r_0^3 \cdot (K_v - 1) \cdot C^{-2}(\theta_0) \left\{ C^{-1}(\theta_0) \left[\tan\phi \cdot I_8 - I_9 \right] \right. \\ & \quad \left. + \cos\theta_0 \left[I_4 - \frac{1}{2} \tan\phi \cdot I_1 \right] \right\} \\ & + \gamma \cdot r_0^2 \cdot (f + r_0 \sin\theta_0) \cdot (K_v - 1) \cdot C^{-1}(\theta_0) \left\{ C^{-1}(\theta_0) \left[\tan\phi \cdot I_2 - \frac{1}{2} I_1 \right] \right. \\ & \quad \left. + \cos\theta_0 \left[I_6 - \tan\phi \cdot I_5 \right] \right\} \\ & + \gamma \cdot r_0^3 \cdot K_h \cdot C^{-2}(\theta_0) \left\{ C^{-1}(\theta_0) \left[\tan\phi \cdot I_9 - I_{10} \right] \right. \\ & \quad \left. + \sin\theta_0 \left[I_4 - \frac{1}{2} \tan\phi \cdot I_1 \right] \right\} \\ & - \gamma \cdot r_0^2 \cdot (f + r_0 \sin\theta_0) \cdot K_h \cdot C^{-1}(\theta_0) \left\{ C^{-1}(\theta_0) \left[\frac{1}{2} \tan\phi \cdot I_1 - I_4 \right] \right. \\ & \quad \left. + \sin\theta_0 \left[I_6 - \tan\phi \cdot I_5 \right] \right\} \end{aligned}$$

où:

$$I_8 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta \cdot \cos^2\theta \cdot e^{3\theta \tan\phi} d\theta$$

$$I_9 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos\theta \cdot \sin^2\theta \cdot e^{3\theta \tan\phi} d\theta$$

2.4 Détermination des fonctions cinématique et statique "critiques"

La résolution numérique du système des trois équations de l'équilibre conduit aux valeurs de θ_0 , θ_1 et P_p . Ces valeurs permettent d'obtenir la surface de rupture, la distribution des contraintes le long de cette surface ainsi que la charge de rupture minimale correspondante. Remarquons que la valeur de la charge de rupture minimale et la surface de rupture correspondante obtenues par cette approche variationnelle sont les mêmes que celles obtenues par Soubra et Kastner (1991) par la méthode de la borne supérieure en analyse limite: ceci s'explique en fait par l'équivalence qui existe entre la méthode du prisme de rupture variationnelle d'une part et la méthode de la borne supérieure en analyse limite pour un mécanisme rotationnel d'autre part (Soubra 1989). Par la présente approche, on obtient en plus la distribution des contraintes normales extrême correspondant à la charge de rupture minimale.

3 RESULTATS NUMERIQUES

3.1 Influence de l'action du séisme sur les fonctions cinématique et statique "critiques"

La prise en compte de l'action du séisme réduit non seulement la valeur de la butée mobilisable mais modifie également le volume de la masse en glissement. On présente dans la figure (2) un exemple numérique montrant l'influence de l'action du séisme sur la surface de rupture dans le cas où $\phi=40^\circ$, $\delta/\phi=-1/2$, $K_v=0$, $K_h=0$; 0.3.

Les surfaces de rupture critiques obtenues par Soubra et Kastner (1991) sont identiques à celles obtenues par cette approche. Comme cité

précédemment, ceci est dû à l'équivalence entre les deux méthodes.

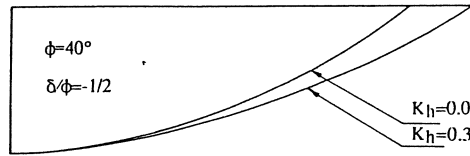


Fig. 2: Action du séisme sur la surface de rupture

En ce qui concerne la distribution des contraintes normales, il n'est pas utile de connaître cette distribution dans la méthode de la borne supérieure en analyse limite. Par contre, la présente approche permet de déterminer cette distribution.

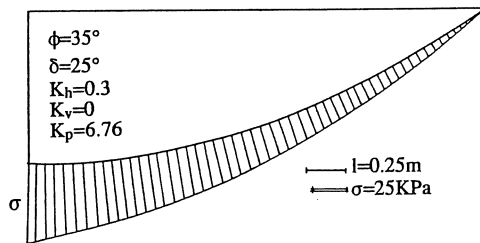
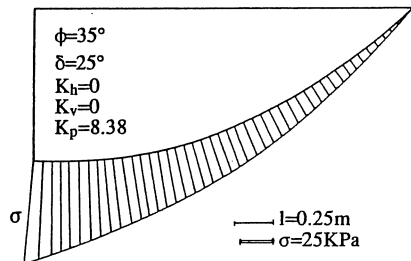


Fig. 3: Action du séisme sur la distribution des contraintes normales

On présente dans la figure (3) un exemple numérique montrant l'influence de l'action du séisme sur la distribution des contraintes

normales dans le cas où $\phi=35^\circ$; $\delta=20^\circ$; $K_v=0$; $K_h=0, 0.3$.

Les distributions des contraintes normales montrent que l'augmentation du coefficient sismique a pour effet de diminuer la valeur de la contrainte normale le long de la surface de rupture. A titre d'exemple, cette diminution atteint 24% au pied du mur quand le coefficient sismique passe de zéro à 0.3.

4 CONCLUSION

Une approche variationnelle appliquée à la méthode du prisme de rupture est utilisée pour déterminer les coefficients de butée en présence de séisme. L'approche présentée est intéressante: Les résultats obtenus par cette méthode (équivalente à la méthode de la borne supérieure en analyse limite pour un mécanisme rotationnel; Soubra et al 1991), sont plus faibles que ceux obtenus par la meilleure solution borne-supérieure disponible dans la littérature (schéma de rupture en log-sandwich de Chang et Chen, 1982). Cette méthode est générale et elle permet de déterminer la butée minimale pour différentes configurations géométriques et pour différents cas de chargements.

REFERENCES

- Caquot, A., & J.Kerisel 1956. *Traité de mécanique des sols*. Paris: Gauthier-Villard.
- Chang, M.F., & W.F. Chen 1982. Lateral earth pressures on rigid retaining walls subjected to earthquake forces. *Solid mechanics archives*. 315-362. The Hague: Martinus Nijhoff.
- Coulomb, C.A. 1776. Essais sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture: *Mém. Acad. R. Sav. Etr.* vol.7 :343-382.

- Mononobe, N., & H. Matsuo 1929. On the determination of earth pressures during earthquakes. *World Engineering Conference*. vol.9.
- Sokolovski, V.V. 1960. *Statics of soil media*. London: Butterworth.
- Soubra, A.H. 1989. *Application de la méthode variationnelle au problème de détermination des pressions passives des terres. Influence des forces d'écoulement*. Thèse de Doctorat , Lyon, France, 200p.
- Soubra, A.H. & R. Kastner 1991. Passive earth pressure coefficients in seismic areas by the limit analysis method. *5th International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Karlsruhe, Vol. 1, in press.
- Terzaghi, K. 1943. *Theoretical Soil Mechanics*. New-York:Wiley.