

ÉTUDE FIABILISTE DES FONDATIONS CIRCULAIRES PAR LA MÉTHODE DES SURFACES DE RÉPONSE

RELIABILITY-BASED ANALYSIS OF CIRCULAR FOOTINGS USING RESPONSE SURFACE METHODOLOGY

Mikaël KALFA¹, Dalia YOUSSEF ABDEL MASSIH², Abdul-Hamid SOUBRA¹

¹ Université de Nantes, GeM, UMR CNRS 6183, Saint-Nazaire, France

² CNRS, Bhanes, Liban

RÉSUMÉ – Cet article présente une analyse fiabiliste à l'ELU et à l'ELS d'une fondation circulaire. Les modèles déterministes sont basés sur des simulations numériques utilisant le logiciel *FLAC*^{3D}. Les résultats numériques ont montré que l'hypothèse des variables aléatoires non corrélées est conservatrice par rapport à celle des variables négativement corrélées. La probabilité de ruine de la fondation est très sensible aux coefficients de variation de l'angle de frottement interne et du module d'Young du sol. Le calcul de l'indice de fiabilité du système ELU-ELS est présenté et commenté.

ABSTRACT – A reliability-based analysis of a circular foundation is presented. The deterministic models are based on numerical simulations using *FLAC*^{3D} code. Both the ultimate and the serviceability limit states are considered. It was shown that the assumption of uncorrelated soil parameters is conservative in comparison to the one of negatively correlated variables. The failure probability was highly influenced by the coefficients of variation of the angle of internal friction and the Young modulus of the soil. The computation of the system failure probability involving both ultimate and serviceability limit states was also presented and discussed.

1. Introduction

Les approches traditionnelles dans l'analyse et le dimensionnement de fondations superficielles sont déterministes : on considère les valeurs moyennes des variables d'entrée et les incertitudes les concernant sont intégrées dans les calculs au travers d'un facteur de sécurité global qui est essentiellement un « facteur d'ignorance ». Une approche fiabiliste de l'étude des fondations est plus rationnelle puisque qu'elle permet de considérer l'incertitude inhérente à chaque paramètre. Une telle analyse est aujourd'hui rendue possible par une meilleure connaissance des propriétés statistiques du sol (Phoon et Kulhawy 1999). Dans cet article, une analyse fiabiliste d'une fondation circulaire, reposant en surface sur un sol frottant et cohérent non surchargé et soumise à un chargement vertical centré, est présentée. De précédentes études sur la fiabilité des fondations se sont intéressées soit à l'état limite ultime (ELU) soit à l'état limite de service (ELS) [Fenton et Griffiths, 2003 et Youssef Abdel Massih et al., 2008]. Cet article traite des deux états limites dans l'analyse fiabiliste des fondations. Deux modélisations déterministes basées sur le logiciel en différences finies *FLAC*^{3D} sont utilisées. La première permet de calculer la capacité portante de la fondation et la seconde permet de calculer le déplacement de la fondation dû à une charge de service. La méthodologie des surfaces de réponse est employée. Les variables aléatoires considérées dans l'étude sont les paramètres de cisaillement et les propriétés élastiques du sol. Après une brève description des concepts de base

de la théorie de la fiabilité, les deux modélisations (déterministe et probabiliste) et les résultats fiabilistes correspondants sont présentés et commentés.

2. Concepts de base en fiabilité

L'indice de fiabilité est une mesure de la sûreté de fonctionnement qui prend en compte l'incertitude inhérente aux différentes variables d'entrée. L'indice de fiabilité le plus utilisé est celui de Hasofer-Lind. Sa formulation matricielle est donnée par :

$$\beta_{HL} = \min_{x \in F} \sqrt{(x - \mu)^T C^{-1} (x - \mu)} \quad (1)$$

où x est le vecteur représentant les n variables aléatoires, μ est le vecteur de leur valeur moyenne, C est leur matrice de covariance et F est le domaine de ruine. La minimisation de l'équation (1) est réalisée sous la contrainte $G(x) \leq 0$; la surface d'état limite $G(x) = 0$ séparant l'espace des variables aléatoires en deux régions : un domaine de ruine F , représenté par $G(x) \leq 0$ et un domaine de sûreté donné par $G(x) > 0$. L'approche classique pour le calcul de l'indice de fiabilité β_{HL} représenté par l'équation (1) consiste à ramener la surface d'état limite dans un espace de variables aléatoires non corrélées, normales, centrées et réduites. Dans ce repère, la distance minimale entre l'origine et la surface d'état limite représente l'indice de fiabilité β_{HL} . A partir de la méthode FORM '*First Order Reliability Method*' et de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind β_{HL} , la probabilité de ruine peut être approchée par $P_f \approx \Phi(-\beta_{HL})$ où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi normale standard.

3. Modèle déterministe de calcul de la capacité portante et du déplacement d'une fondation circulaire

Dans cette partie, nous proposons de calculer la capacité portante d'une fondation soumise à une charge verticale et le déplacement de cette fondation dû à une charge de service et ce, en utilisant le logiciel en différences finies *FLAC*^{3D}. Dans ce logiciel, un schéma de calcul Lagrangien explicite ainsi qu'une technique de discrétisation mixte sont utilisés. Une option interne de programmation *FISH* permet à l'utilisateur d'ajouter ses propres sous-programmes. Bien qu'une analyse mécanique statique soit requise, les équations du mouvement sont employées dans ce code. La solution d'un problème statique est obtenue en forçant le processus dynamique à s'amortir en incluant des termes qui retirent graduellement de l'énergie cinétique au système. Les contraintes et les déformations sont calculées à plusieurs intervalles de temps (cycles) jusqu'à ce qu'un état d'équilibre statique ou d'écoulement plastique libre soit atteint. La convergence vers cet état peut être contrôlée en se fixant une valeur maximale pour les forces non balancées de tous les nœuds du modèle. La force non balancée d'un nœud représente l'effet de tous les éléments en relation avec ce nœud et des charges appliquées à ce nœud. Un sol aux propriétés aléatoires (*i.e.* modélisées par des variables aléatoires) est étudié dans l'analyse fiabiliste mais les champs de vitesses des calculs déterministes ont une symétrie de révolution. En effet pour une simulation donnée, le sol est homogène ; l'aléa du sol se traduisant par des propriétés différentes d'une simulation à l'autre.

Nous nous intéressons ici à la détermination de la capacité portante d'une fondation circulaire rigide de rayon $R = 1$ m, reposant sur un sol cohérent et frottant (c, φ) et soumise à un chargement vertical. Etant donné la symétrie de révolution, nous n'avons modélisé qu'un quart de la fondation et du sol sous-jacent, ce dernier ayant pour dimensions un diamètre de $14R$ et une hauteur de $5R$ (Figure 1).

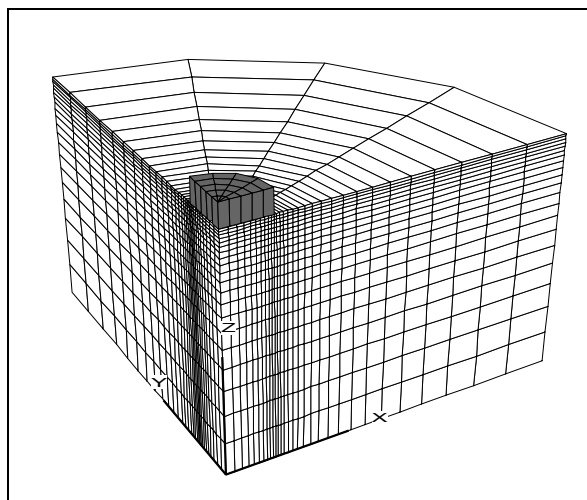


Figure 1. Domaine de sol et maillage utilisé dans $FLAC^{3D}$

Pour modéliser le sol, une loi de comportement élastique parfaitement plastique basée sur le critère de Mohr-Coulomb a été utilisée avec les paramètres suivants pour les propriétés élastiques : $G = 23 \text{ MPa}$ et $K = 50 \text{ MPa}$ (équivalent à $E = 60 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$). Les valeurs des paramètres de cisaillement du sol sont $\varphi = 30^\circ$, $\psi = 20^\circ$ et $c = 20 \text{ kPa}$ où ψ est l'angle de dilatance. Le poids volumique du sol est de 18 kN/m^3 . La fondation circulaire, de rayon 1 m et de hauteur 0,5 m, est modélisée par un matériau non pesant qui suit une loi de comportement élastique dont les paramètres sont : un module d'Young $E = 25 \text{ GPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.4$. Ces valeurs, en comparaison avec celles du sol, sont très grandes et assurent un comportement rigide de la fondation. Il est à noter que les propriétés élastiques du sol et de la fondation ont un effet négligeable sur la charge de rupture. La fondation est liée au sol par des éléments d'interface qui suivent la loi de Coulomb. Nous prenons pour l'interface, un angle de frottement, un angle de dilatance et une cohésion identiques à ceux du sol afin de simuler une interface sol-fondation parfaitement rugueuse. Des coefficients de raideur normale $K_n = 1 \text{ GPa/m}$ et de cisaillement $K_s = 1 \text{ GPa/m}$ sont donnés à l'interface. Pour le calcul de la charge limite, des contraintes géostatiques sont d'abord appliquées au sol. Ensuite, plusieurs cycles sont lancés afin d'atteindre un état d'équilibre statique. Enfin, les déplacements obtenus sont réinitialisés à zéro pour n'obtenir que les déplacements de la fondation dus au chargement de celle-ci. Dans un second temps, une vitesse de chargement optimale (i.e. un déplacement par pas de calcul) de $2,5 \times 10^{-6} \text{ m/cycle}$ est appliquée aux nœuds de la fondation. Un certain nombre de cycles est lancé jusqu'à atteindre un état stationnaire d'écoulement plastique dans le sol. Cet état est obtenu lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites : (i) la charge de la fondation devient constante et (ii) les forces non balancées deviennent faibles et constantes lorsque le nombre de cycles augmente. A chaque cycle, la charge de fondation est obtenue en

utilisant une fonction *FISH* qui intègre les contraintes normales de tous les éléments en contact avec la fondation. La valeur de la charge verticale de la fondation à l'état d'écoulement plastique est la charge de rupture.

Pour le calcul du déplacement vertical de la fondation, une loi de comportement élastique parfaitement plastique est de nouveau employée. La même procédure que celle décrite précédemment au sujet des contraintes géostatiques est utilisée ici. Ensuite, une contrainte de service uniforme est appliquée à la base de la fondation. Un certain nombre de cycles est lancé jusqu'à atteindre un état stationnaire d'équilibre statique dans le sol. Cet état est obtenu lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites : (i) le déplacement vertical de la fondation devient constant et (ii) les forces non balancées deviennent faibles et constantes lorsque le nombre de cycles augmente.

4. Analyse fiabiliste des fondations

Deux modes de défaillance sont traités : le premier implique l'ELU et s'intéresse à la capacité portante de la fondation alors que le second concerne l'ELS et s'intéresse au déplacement de service de cette fondation. Les deux modélisations déterministes présentées dans la partie précédente sont utilisées. Les variables aléatoires considérées sont la cohésion, l'angle de frottement interne, le module d'Young et le coefficient de Poisson du sol. Etant donné l'effet relativement faible des propriétés élastiques du sol sur la valeur de la capacité portante, seuls c et φ seront pris en compte lorsque l'on étudiera l'ELU. De la même façon, seul l'aléa sur E et ν sera pris en compte dans l'analyse de l'ELS. Deux fonctions de performance correspondantes aux deux modes de défaillance sont utilisées. La première est définie par rapport au poinçonnement du sol :

$$G_1 = P_u / P_s = F - 1 \quad (2)$$

où P_u est la charge limite, calculée avec *FLAC*^{3D}, P_s est la charge appliquée sur la fondation et F est le facteur de sécurité. La seconde fonction de performance est définie par rapport à un déplacement admissible donné, elle s'écrit :

$$G_2 = u_{\max} - u \quad (3)$$

où u est le déplacement vertical, calculé avec *FLAC*^{3D}, de la fondation soumise à une charge de service P_s et $u_{\max}$ est le déplacement vertical maximal admissible.

La méthode des surfaces de réponse est employée pour trouver une approximation des fonctions de performance non connues analytiquement.

4.1. Méthode des surfaces de réponse

Si la fonction de performance est connue sous une forme analytique, fonction des variables aléatoires, alors l'indice de fiabilité peut être aisément calculé. Le calcul déterministe sous *FLAC*^{3D} ne permettant pas l'obtention d'une forme analytique explicite de la fonction de performance, l'idée est d'approcher cette fonction, par itérations successives, pour calculer l'indice de fiabilité et le point de conception correspondant. L'algorithme de la méthode des surfaces de réponse utilisé ici est celui de Tandjiria et al. (2000). La fonction de performance employée est de type quadratique avec des termes carrés mais sans termes croisés. L'expression de cette fonction approchée est :

$$G(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i . x_i + \sum_{i=1}^n b_i . x_i^2 \quad (4)$$

où les x_i sont les variables aléatoires, n étant le nombre de ces variables aléatoires et (a_i, b_i) des coefficients à déterminer. Dans cette étude, nous avons considéré deux variables aléatoires pour chaque état limite (*i.e.* $n=2$). Ces variables aléatoires sont caractérisées par leur moyenne μ_i et leur écart-type σ_i (ou coefficient de variation). Un bref descriptif de l'algorithme utilisé est présenté ci-dessous :

1. Calcul de $G(x)$ au point μ de coordonnées $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ ainsi qu'aux $2n$ points situés à $\mu_i \pm k\sigma_i$. Dans cette étude, $k=1$ et $n=2$, *i.e.* les 5 points sont : $\{ (\mu_1, \mu_2) ; (\mu_1 - \sigma_1, \mu_2) ; (\mu_1 + \sigma_1, \mu_2) ; (\mu_1, \mu_2 - \sigma_2) ; (\mu_1, \mu_2 + \sigma_2) \}$.

2. Les $2n+1$ valeurs de $G(x)$ obtenues à l'étape précédente (cinq dans notre cas) servent à résoudre l'équation (4) pour obtenir les coefficients (a_i, b_i) . Ceci permet de trouver une approximation de la surface de réponse ;

3. Un indice de fiabilité β_{HL} et un point de conception sont obtenus par minimisation de l'équation (1) en utilisant la fonction de performance calculée à l'étape précédente ;

4. Les étapes (1 à 3) constituent une itération. Plusieurs itérations sont répétées jusqu'à convergence. Chaque fois que l'étape 1 est reprise, les μ_i doivent être remplacés par les nouvelles coordonnées du point de conception obtenues à l'étape 3 et les $2n$ nouveaux points $\mu_i \pm k\sigma_i$ entourent alors ce point de conception.

La détermination de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind nécessite (i) de trouver les coefficients (a_i, b_i) des surfaces de réponse successives grâce à la résolution de l'équation (4) pour les $2n+1$ points étudiés et (ii) la minimisation de l'indice de fiabilité sous la contrainte $G(x) \leq 0$. Ces deux opérations sont réalisées avec l'outil d'optimisation du logiciel Matlab. Les itérations sont poursuivies jusqu'à convergence de l'indice de fiabilité. Le critère de convergence est atteint lorsque l'écart entre les valeurs de l'indice de fiabilité de deux itérations successives est plus petit que 10^{-2} . Il est à noter que la détermination des valeurs de la fonction de performance aux $2n+1$ points étudiés se fait en utilisant des calculs déterministes sous $FLAC^{3D}$. Les résultats de ces calculs constituent les paramètres d'entrée dans le calcul des coefficients (a_i, b_i) de la surface de réponse approchée par Matlab. Or, pour avoir les valeurs de la fonction de performance aux $2n+1$ points étudiés, il nous faut connaître les coordonnées du point de conception qui sont obtenues avec une procédure de minimisation sous Matlab. Par conséquent, il a fallu mettre en liaison $FLAC^{3D}$ et Matlab (avec des fichiers textes et des commandes *FISH*) pour permettre un échange de données, dans les deux sens, nécessaire à l'automatisation de l'algorithme itératif de calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind.

5. Résultats numériques

Pour l'ELU, les valeurs choisies pour les moments statistiques des paramètres de cisaillement du sol et de leur coefficient de corrélation $\rho_{c,\varphi}$ sont comme suit :

$\mu_c = 20 \text{ kPa}$, $\mu_\varphi = 30^\circ$, $CV_c = 20\%$, $CV_\varphi = 10\%$ et $\rho_{c,\varphi} = -0.5$. Pour la distribution de probabilité des variables aléatoires, on suppose que c suit une loi lognormale et que φ est borné et suit une loi Béta (Fenton et Griffiths 2003). Les paramètres de cette loi Béta ont été déterminés à partir de la valeur moyenne et de l'écart-type de

φ . Il convient de préciser que les propriétés élastiques du sol, considérées comme déterministes pour l'ELU, n'ont aucun effet sur la valeur de la capacité portante. Des valeurs plus grandes de ces paramètres (*i.e.* $G = 100\text{MPa}$ et $K = 200\text{MPa}$) ont été testées. Aucun changement n'a été observé sur la valeur de la capacité portante. En revanche une réduction, de 50%, du nombre de cycles nécessaire pour atteindre la rupture a été observée (*i.e.* une réduction de moitié du temps de calcul). Par conséquent, ces valeurs seront utilisées dans tous les calculs à l'ELU à venir. Le temps de calcul nécessaire pour chaque simulation a été d'environ 40 minutes sur un ordinateur doté d'un processeur Centrino 2 GHz.

Pour l'ELS, des sols avec des petits modules d'Young ont été utilisés. Dans ces sols, la variabilité des caractéristiques de compressibilité est très large. Nous avons utilisé une loi lognormale pour E avec une valeur moyenne de 60 MPa et un coefficient de variation de 15 %. En ce qui concerne le coefficient de Poisson, ν est décrit par une loi lognormale de moyenne égale à 0,3 et dont le coefficient de variation est égal à 5 %. Pour la valeur du coefficient de corrélation de ces deux paramètres, nous avons traité les cas de propriétés élastiques du sol non corrélées et corrélées avec $\rho_{E,\nu} = -0.5$. Le déplacement admissible adopté pour cet article est $u_{\max} = 0,1$ m. Le temps de calcul nécessaire pour chaque simulation a été d'environ 30 minutes sur un ordinateur doté d'un processeur Centrino 2 GHz.

5.1. Indice de fiabilité

Les figures 2 (a et b) présentent l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind en fonction du facteur de sécurité $F=P_u/P_s$ et ce, respectivement pour l'ELU et l'ELS où P_u est la charge qui amène à la rupture du sol par poinçonnement. Il est à remarquer qu'à l'ELS, la charge aboutissant à la défaillance est celle correspondant à un déplacement maximal de 0,1 m. La contrainte de service utilisée à l'ELS est égale 1640 kN/m^2 . Des variables corrélées et non corrélées ont été étudiées. On observe que l'indice de fiabilité augmente lorsque le facteur de sécurité augmente. L'indice de fiabilité correspondant à des variables non corrélées est plus petit que celui de variables corrélées. On peut déduire que l'hypothèse de non corrélation entre paramètres du sol est plus sécuritaire par rapport à celle des variables corrélées. A titre d'exemple, pour un facteur de sécurité de 3,15, l'indice de fiabilité à l'ELU augmente de 35% si les variables c et φ sont considérées négativement corrélées. En comparant les figures (2a) et (2b), nous remarquons que pour des valeurs du facteur de sécurité proches de 3 (*i.e.* valeurs usuelles), l'indice de fiabilité de l'ELU est significativement plus petit que celui de l'ELS. Pour de grandes valeurs du facteur de sécurité, l'ELU est donc prédominant et contribuera le plus dans la détermination de la probabilité de ruine du système (*cf.* § 5.3). La différence entre les indices de fiabilité des deux états limites devient plus petite pour des valeurs du facteur de sécurité plus petites. Par conséquent, lorsque le facteur de sécurité décroît, les deux états limites contribuent approximativement de la même façon au calcul de la probabilité de ruine du système (*cf.* § 5.3).

5.2. Sensibilité de la probabilité de ruine à la variabilité des propriétés du sol

Les figures 3(a et b) montrent la probabilité de ruine en fonction des coefficients de variation des paramètres du sol pour l'ELU (Figure 3a) et l'ELS (Figure 3b) pour des variables négativement corrélées. La valeur du facteur de sécurité est égale à 3,15 pour l'ELU alors que la contrainte verticale de service adoptée à l'ELS est égale

à 1000 kN/m². Pour chaque courbe, le coefficient de variation d'un des paramètres est maintenu constant alors que l'on fait varier le coefficient de variation du second.

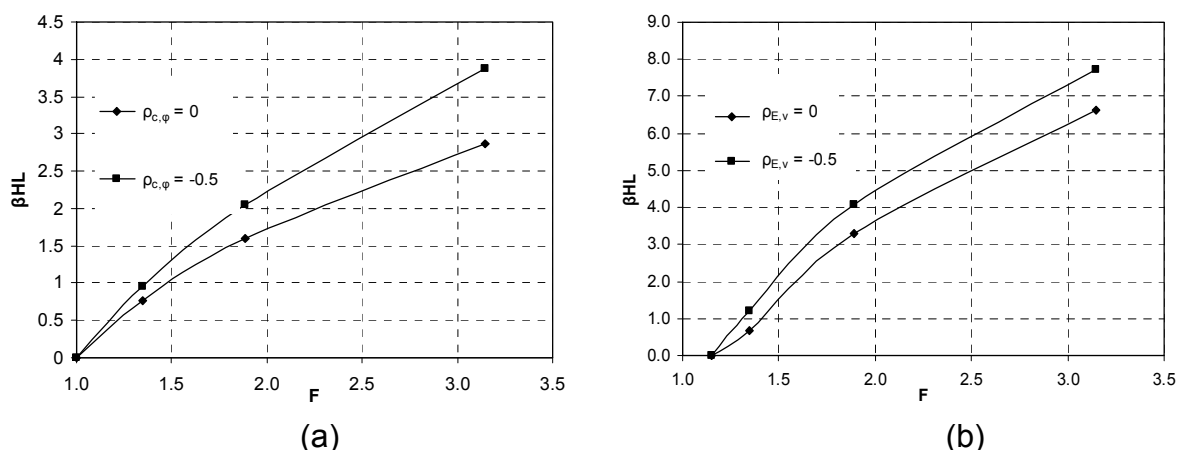


Figure 2. Indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité $F=P_u/P_s$ a) à l'ELU et b) à l'ELS

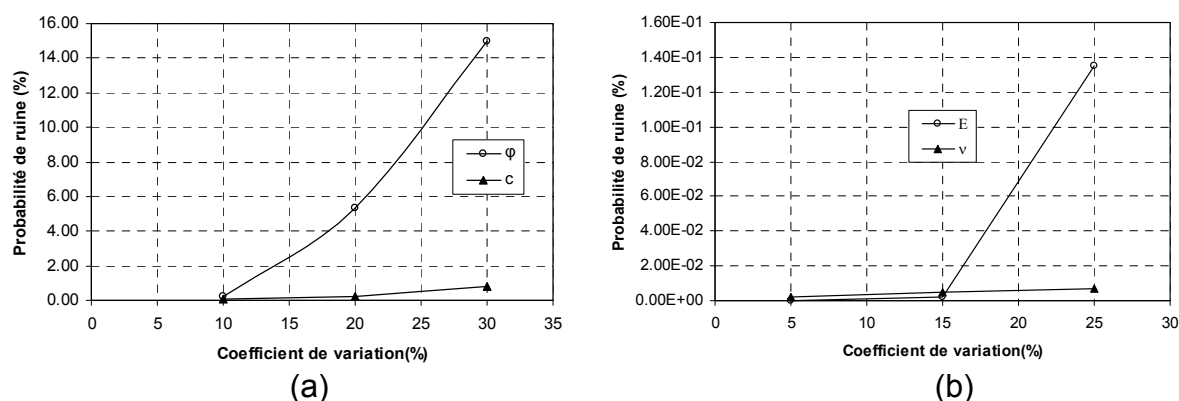


Figure 3. Effet de la variabilité a) des propriétés de cisaillement c et φ et b) des propriétés élastiques, sur la probabilité de ruine

Les résultats montrent que la probabilité de ruine est très influencée par les coefficients de variation de l'angle de frottement interne à l'ELU et le module d'Young à l'ELS. Plus la dispersion de φ et E est grande, plus est grande la probabilité de ruine de la fondation. Ceci signifie que la détermination précise de la distribution de ces paramètres est très importante pour l'obtention de résultats probabilistes fiables. En revanche les coefficients de variation de c et ν n'affectent pas significativement la probabilité de ruine.

5.3. Probabilité de ruine du système ELU-ELS

La probabilité de ruine du système impliquant l'ELS et l'ELU est donnée par :

$$P_{f_{sys}} = P_f(U \cup S) = P_f(U) + P_f(S) - P_f(U \cap S) \quad (5)$$

où $P_f(U)$ est la probabilité de ruine à l'ELU, $P_f(S)$ la probabilité de ruine à l'ELS et $P_f(U \cap S)$ la probabilité de ruine sous les deux états limites. Le tableau (1) présente l'indice de fiabilité de l'ELU et de l'ELS (pour des variables corrélées et non corrélées) et celui système ELU-ELS et ce, pour différentes valeurs du facteur de sécurité défini vis-à-vis de la rupture par poinçonnement du sol. Pour le système ELU-ELS, quatre cas sont présentés : ce sont les combinaisons de paramètres de cisaillement

corrélés et non corrélés avec des propriétés élastiques du sol corrélées et non corrélées. Ce tableau présente aussi l'indice de fiabilité de l'ELU et de l'ELS pour les quatre combinaisons de corrélation.

Tableau 1. Indice de fiabilité de l'ELU, de l'ELS et du système ELU-ELS pour différentes valeurs du facteur de sécurité $F=P_u/P_s$

$P_s = P_u/P_s$	$\beta_{sys} \text{ ELU}$		$\beta_{sys} \text{ ELS}$		$\beta_{sys} \text{ ELS} \cup \text{ ELU}$			
	$\rho_{c,\varphi} = 0$	$\rho_{c,\varphi} = -0,5$	$\rho_{E,v} = 0$	$\rho_{E,v} = -0,5$	$\rho_{c,\varphi} = 0$ $\rho_{E,v} = 0$	$\rho_{c,\varphi} = -0,5$ $\rho_{E,v} = -0,5$	$\rho_{c,\varphi} = -0,5$ $\rho_{E,v} = 0$	$\rho_{c,\varphi} = 0$ $\rho_{E,v} = -0,5$
3,15	2,87	3,88	6,64	7,73	2,87	3,88	3,88	2,87
1,89	1,59	2,05	3,3	4,09	1,59	2,05	2,04	1,59
1,35	0,77	0,95	0,67	1,19	0,21	0,62	0,31	0,49

Pour la fiabilité du système, l'hypothèse de paramètres non corrélés est conservative en comparaison à celle de variables corrélées. Pour des valeurs du facteur de sécurité proches de 3 (valeurs usuelles) pour lesquelles l'ELU s'est révélé prédominant, l'indice de fiabilité du système a été trouvé égal à celui de l'ELU (cf. Tableau 1). Quand le facteur de sécurité décroît, la fiabilité du système dépend des deux états limites et l'on a trouvé un indice de fiabilité plus faible que celui correspondant à un unique état limite (cf. Tableau 1). On en conclut que les deux états limites doivent être pris en compte dans l'analyse fiabiliste de fondations pour de petites valeurs du facteur de sécurité.

6. Conclusion

L'analyse fiabiliste à l'ELU et à l'ELS d'une fondation circulaire a été effectuée avec la méthodologie des surfaces de réponse. L'hypothèse de paramètres non corrélés s'est révélée plus conservative en comparaison avec celle de variables corrélées. La probabilité de ruine est apparue très influencée par les incertitudes de l'angle de frottement interne et du module d'Young du sol. Pour des valeurs du facteur de sécurité proches de 3 (i.e. valeurs usuelles), l'ELU s'est révélé prédominant. Par conséquent, la fiabilité du système pour ces cas a été trouvée égale à celle de l'ELU. Pour des valeurs plus petites du facteur de sécurité, la fiabilité du système dépend des deux états limites et un indice de fiabilité plus petit que celui correspondant à un seul des états limites a été trouvé. Les deux états limites doivent donc être pris en compte dans l'analyse fiabiliste de fondations pour de faibles valeurs du facteur de sécurité.

7. Références bibliographiques

- Fenton, G.A., Griffiths, D.V. 2003. Bearing capacity prediction of spatially random c- ϕ soils. *Can. Geotech. J.*, 40:54-65.
- Phoon, K.-K., Kulhawy, F.H. 1999. Evaluation of geotechnical property variability. *Can. Geotech. J.*, 36:625-639.
- Tandjiria, V., Teh, C.I., Low, B.K. 2000. Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods. *Structural Safety*, 22:335-355.
- Youssef Abdel Massih, D.S., Soubra, A.-H., Low, B.K. 2008. Reliability-based analysis and design of strip footings against bearing capacity failure. *J. of Geotech. & Geoenviron. Engrg.*, ASCE, Vol. 134, N° 7, in press.